LuventicuS
Academia de Ciencias

FÓRMULA DE APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA ENÉSIMA PARA CALCULADORAS PROGRAMABLES

MARIANO ROMÁN DEHEZA
INGENIERO QUÍMICO

Área de Fundamentos de la Ingeniería
Academia de Ciencias Luventicus

Dirección: Pasaje Monroe 2766, (2000) Rosario, Argentina
Teléfono: +54-341-4487316
Correo electrónico: mreheza@luventicus.org
Página personal: www.luventicus.org/gente/mrdeheza.html

RESUMEN

En este trabajo se presenta la deducción de una fórmula para el cálculo aproximado de la derivada enésima de una función en un punto. También se presenta un programa para el cálculo de derivadas basado en esa fórmula.

Palabras clave: **derivada; inducción completa; aproximación; calculadora programable; análisis numérico**

Recibido el día 22 de febrero de 2002
Aceptado el día 10 de mayo de 2002
Actas Acad. Luv. 2002, **4**, 1 -5
ftp.luventicus.org / trabajos / 02 AAL004.pdf
ISSN 1666 -7581

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de derivadas es parte de la práctica diaria de la ingeniería. En este trabajo se introduce una fórmula para el cálculo aproximado de la derivada enésima de una función en un punto. Fórmulas de este tipo se deducen en los cursos de Análisis Numérico y son de interés para quienes hacen uso de calculadoras programables.

2. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA

La derivada primera de la función f de la variable x en el punto x_0 es (Piskunov 1977)

$$f^{\mathrm{I}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \tag{2.1}$$

Haciendo uso de la notación:

$$x = x_0 + \Delta x , \tag{2.2}$$

para variaciones Δx pequeñas, será

$$f^{\mathrm{I}}(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} . \tag{2.3}$$

La derivada segunda es entonces

$$f^{\mathrm{II}}(x_0) \simeq \frac{f^{\mathrm{I}}(x_0 + \Delta x) - f^{\mathrm{I}}(x_0)}{\Delta x} . \tag{2.4}$$

Pero

$$f^{\mathrm{I}}(x_0 + \Delta x) \simeq \frac{f(x_0 + 2\,\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} ; \tag{2.5}$$

por lo tanto, reemplazando las ecuaciones (2.3) y (2.5) en la ecuación (2.4),

$$f^{\mathrm{II}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + 2\,\Delta x) - 2\,f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)}{(\Delta x)^2} . \tag{2.6}$$

Procediendo del mismo modo, para la derivada tercera se tendrá

$$f^{\mathrm{III}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + 3\,\Delta x) - 3\,f(x_0 + 2\,\Delta x) + 3\,f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(\Delta x)^3} . \tag{2.7}$$

De la comparación de estas expresiones, se deduce que

$$f^{\mathrm{N}}(x_0) \simeq \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i\, f[x_0 + (n-i)\,\Delta x]}{(\Delta x)^n} . \tag{2.8}$$

(La igualdad se da cuando $\Delta x \to 0$.)

3. DEMOSTRACIÓN

A continuación se demuestra la validez de la ecuación (2.8) para todo número natural por el método de *inducción completa* (Mascó de Nasini y López 1977).

Para $n = 1$,

$$f^{\mathrm{I}}(x_0) \simeq \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (-1)^i f[x_0 + (1-i)\,\Delta x]}{(\Delta x)^1} \tag{3. 1}$$

y se obtiene la ecuación (2.1).

Para $n = k$, supondremos que la igualdad se cumple.

$$f^{\mathrm{K}}(x_0) \simeq \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i f[x_0 + (k-i)\,\Delta x]}{(\Delta x)^k} \tag{3. 2}$$

Para verificar que (2.8) se cumple para todo número natural, bastará deducir la expresión:

$$f^{\mathrm{K+1}}(x_0) \simeq \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x]}{(\Delta x)^{k+1}}\,, \tag{3. 3}$$

partiendo de la definición de derivada de orden $K+1$,

$$f^{\mathrm{K+1}}(x_0) \simeq \frac{f^{\mathrm{K}}(x_0 + \Delta x) - f^{\mathrm{K}}(x_0)}{\Delta x}\,. \tag{3. 4}$$

De la ecuación (3.2) se deduce que

$$f^{\mathrm{K}}(x_0 + \Delta x) \simeq \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x]}{(\Delta x)^k}\,. \tag{3. 5}$$

Reemplazando (3.2) y (3.5) en (3.4), se obtiene

$$f^{\mathrm{K+1}}(x_0) \simeq \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \{f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x] - f[x_0 + (k-i)\,\Delta x]\}}{(\Delta x)^{k+1}}\,. \tag{3. 6}$$

A continuación se opera sobre el numerador de (3.6).

$$f^{\mathrm{K+1}}(x_0)\;(\Delta x)^{k+1} \simeq \binom{k}{0} (-1)^0 f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x]\; + \tag{3. 7}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \{f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x] \; - \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^i \{f[x_0 + (k-i)\,\Delta x] \; - \tag{3.9}$$

$$\binom{k}{k} (-1)^2 f\,(x_0) \tag{3.10}$$

El término (3.8) puede ser escrito de otra manera, sustituyendo i por $i+1$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i+1} (-1)^{i+1} \{f[x_0 + (k-i)\,\Delta x]\,, \tag{3.11}$$

lo cual permite asociarlo con el término (3.9), para obtener la expresión:

$$-\sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i+1} + \binom{k}{i}\right] (-1)^i \{f[x_0 + (k-i)\,\Delta x]\,. \tag{3.12}$$

Haciendo uso de la conocida fórmula:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \tag{3.13}$$

(Mascó de Nasini y López 1977), la expresión (3.12) se transforma en

$$-\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i+1} (-1)^i \{f[x_0 + (k-i)\,\Delta x]\,. \tag{3.14}$$

Sustituyendo $i+1$ por i,

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} (-1)^i \{f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x]\,. \tag{3.15}$$

Ahora, la expresión (3.15) se puede asociar al término (3.7), para obtener

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} (-1)^i \{f[x_0 + (k+1-i)\,\Delta x]\,. \tag{3.16}$$

Sumando el término (3.10), en la forma

$$(-1)^{k+1} f\,(x_0) \tag{3.17}$$

y, volviendo a la ecuación (3.6), se obtiene finalmente la ecuación (3.3).

4. IMPLEMENTACIÓN

La ecuación (2.8) puede ser usada para escribir programas que permitan obtener valores aproximados de la derivada enésima de una función en un punto.

El siguiente programa (de 80 líneas) ha sido escrito para la calculadora CASIO FX-602P.

```
LBL 2               MR 01  =        -        -
MR 01               x !    x        MR 00    1
"n"                 ÷      (        )        =
HLT                 (      (        x        Min 00
Min 01              MR 00  1        MR 02    GOTO 1
Min 00              x !    + / -    =        LBL 0
MR 02               x      )        Min F    MR 05
"dx"                (      xʸ       GSB P0   ÷
HLT                 (      MR 00    x        (
Min 02              MR 01  )        MR 04    MR 02
MR 03               -      =        =        xʸ
"x0"                MR 00  Min 04   M + 05   MR 01
HLT                 )      MR 03    MR 00    )
Min 03              x !    +        x = 0    =
"dAR01f/dxAr01" =   )      (        GOTO 0   HLT
LBL1                )      MR 01    MR 00    GOTO 2
```

(El comando GSBP0 remite a un subprograma donde se define la función cuya derivada se desea calcular.)

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en el año 1984, mientras cursaba la carrera de Ingeniería Química. Su presentación ha sido posible gracias al apoyo de la Academia de Ciencias Luventicus.

REFERENCIAS

CASIO FX-602P *Manual del propietario.*

Mascó de Nasini, A. E. & R. López 1977 *Lecciones de Álgebra y Geometría Analítica*, vol. 1, págs. 23 y 42. Buenos Aires: Editorial Universitaria Cultura Argentina.

Piskunov, N. 1977 *Cálculo Diferencial e Integral*, tomo 1, pág. 74. Moscú: Mir.